Α 2. Έστω N μια ορθόθετη υποομάδα μιας ομάδας G και H μια ακόμη υποομάδα τής G. Να δειχθεί ότι η μικρότερη υποομάδα τής G που περιέχει το σύνολο $N \cup H$ ισούται με NH. Να συμπεράνετε ότι $NH = HN$.

Λύση. Κάθε υποομάδα τής G, που περιέχει το $N \cup H$, οφείλει να περιέχει και το σύνολο $NH = \{nh \mid n \in N, h \in N\}$, αφού περιέχει πάντοτε το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε στοιχείων της. Επομένως,

$$NH \subseteq \langle N \cup H \rangle,$$

όπου $\langle N \cup H \rangle$ η υποομάδα τής G που παράγεται από το $N \cup H$.

Το σύνολο NH είναι μια υποομάδα τής G, αφού

(α′) $NH \neq \emptyset$, (επειδή $e_G \in N, e_G \in H \Rightarrow e_G e_G \in NH$).

(β′) $a = n_1 h_1, b = n_2 h_2, h_1, h_2 \in H, n_1, n_1 \in N \Rightarrow ab^{-1} \in NH$, διότι

$$\begin{aligned}
&ab^{-1} = n_1 h_1 h_2^{-1} n_2^{-1} = (n_1 h_1 h_2^{-1} n_2^{-1})(h_2 h_2^{-1}) = \\
&n_1 h_1 \underbrace{(h_2^{-1} n_2^{-1} h_2)}_{=n' \in N} h_2^{-1} = n_1 h_1 n' h_2^{-1} = \\
&n_1 h_1 n' (h_1^{-1} h_1) h_2^{-1} = n_1 \underbrace{(h_1 n' h_1^{-1})}_{=n'' \in N} h_1 h_2^{-1} = \\
&n_1 n'' h_1 h_2^{-1} \in NH,
\end{aligned}$$

όπου τα n' και $n'' \in N$, αφού η N είναι ορθόθετη.

Γι' αυτό $\langle N \cup H \rangle = NH$.

Τέλος, επειδή $N \cup H = H \cup N$ και αποδεικνύοντας με τρόπο ανάλογο τού προηγούμενου ότι $\langle H \cup N \rangle = HN$ έχουμε

$$NH = \langle N \cup H \rangle = \langle H \cup N \rangle = HN.$$